

↗가속운동

제6장

원운동과 뉴턴 법칙의 응용

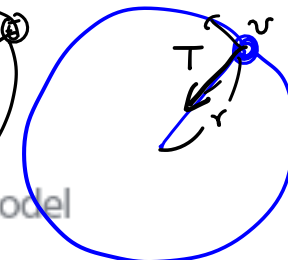
Circular Motion and Other Applications
of Newton's Laws



- 6.1 등속 원운동하는 입자 모형의 확장
- 6.2 비등속 원운동
- 6.3 가속틀에서의 운동
- 6.4 저항력을 받는 운동

- 5장에서 Newton의 운동 법칙을 직선 운동에 적용
- 6장에서는 Newton의 운동 법칙을
 - 1) 원운동
 - 2) 점성이 있는 매질 속에서 운동하는 물체의 운동에
적용

$$G \frac{M_S m_E}{r^2} = F = m_E \frac{v^2}{r} \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_S}{r}}$$



$$\frac{mv^2}{r} = T$$

$$r\omega = v$$

$$\omega = \frac{v}{r}$$

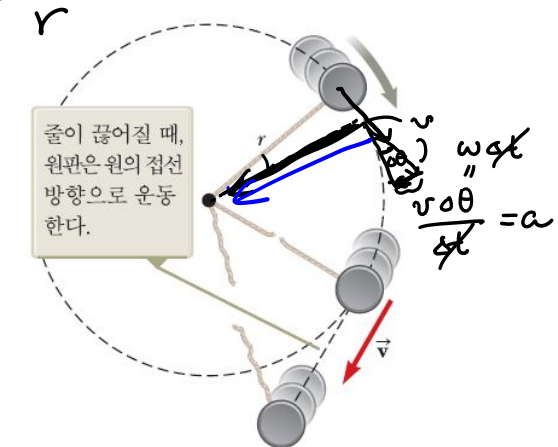
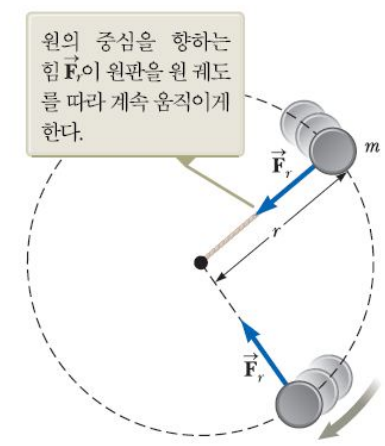
구심가속도

6.1 등속 원운동하는 입자 모형의 확장

Extending the Particle in Uniform Circular Motion Model

앞 장에서 배운 것처럼 원운동할 때 속도 벡터의 변화로부터 구한 물체의 **구심가속도**는

$$a_c = v\omega = \frac{v^2}{r}$$

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$


뉴턴의 운동 법칙에 따르면 물체에 작용하는 힘은 줄에 걸리는 **장력**이 유일함. (물체가 수평면 위에서 운동 중이라고 가정하면 중력은 수직항력과 상쇄된다).

$$\sum F = T = \underline{ma_c} = m \frac{v^2}{r} = mv\omega = mr\omega^2$$

예제 6.1

원추 진자

질량 m 인 작은 공이 길이 L 인 끈에 매달려 있다. 그림처럼 이 공은 수평면에서 반지름 r 인 원 위를 일정한 속력 v 로 돌고 있다(원뿔 진자).

진자의 속력 v 에 대한 식을 구하라.

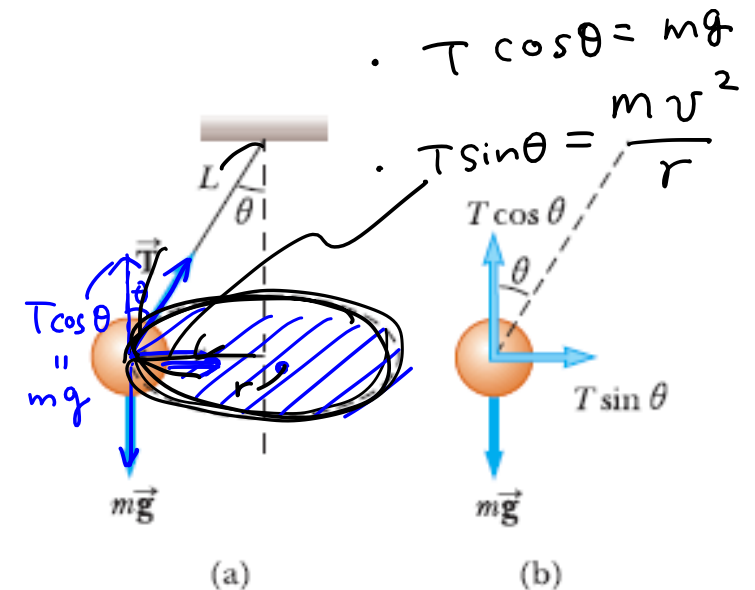
운동을 수직 성분과 수평 성분으로 분해하여 뉴턴 법칙을 적용하면,

$$\sum F_y = T \cos \theta - mg = 0$$

$$(1) \quad T \cos \theta = mg$$

$$(2) \quad \sum F_x = T \sin \theta = ma_c = \frac{mv^2}{r}$$

$$t = \frac{2\pi r}{v} \quad \therefore v = \sqrt{rg \tan \theta}$$



$$\frac{r}{L} = \sin \theta$$

$$r = L \sin \theta$$

$$\tan \theta = \frac{v^2}{rg}$$

$$v = \sqrt{Lg \sin \theta \tan \theta}$$

예제 6.2

얼마나 빨리 돌 수 있나?

질량 0.500 kg인 원판이 길이 1.50 m인 밧줄 끝에 붙어 있다. 이 원판은 그림 6.1에서처럼 수평면 위의 원을 따라 돌고 있다. 만약 밧줄이 50.0 N의 최대 장력을 버틸 수 있다면, 밧줄이 끊어지지 않고 돌 수 있는 원판의 최대 속력은 얼마인가? 줄은 운동의 전 과정에서 수평으로 유지된다고 가정한다.

$$50.0 \geq T = m \frac{v^2}{r}$$

$$50 = 0.5 \frac{v^2}{1.5}$$

$$v = \sqrt{150}$$



예제 6.3

회전식 관람차

질량 m 인 어린이가 그림 6.4a처럼 회전식 관람차를 타고 있다. 어린이는 반지름이 10.0m인 연직 원 위의 3.00 m/s의 일정한 속력으로 운동한다.

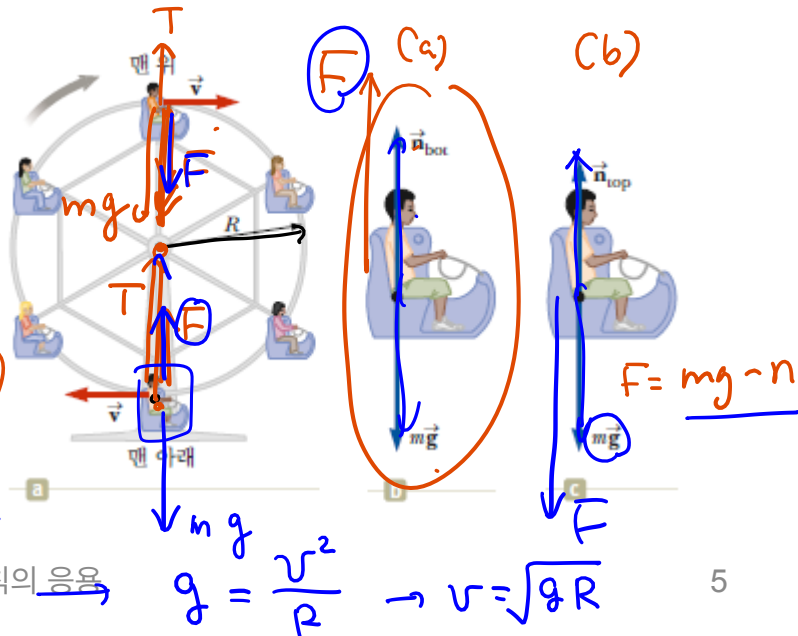
(A) 관람차가 연직 원의 맨 아래에 있을 때 좌석이 어린이에게 작용하는 힘을 구하라. 답을 어린이의 무게 mg 로 표현하라.

$$F = m \frac{v^2}{R} = n - mg \rightarrow n_b = m(g + \frac{v^2}{R})$$

(B) 원 궤도의 맨 꼭대기에서 의자가 어린이에게 작용하는 힘을 구하라.

$$F = m \frac{v^2}{R} = mg - n \rightarrow n_t = m(g - \frac{v^2}{R})$$

$$n_b > n_t$$

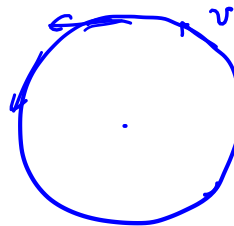


$$g = \frac{v^2}{R} \rightarrow v = \sqrt{gR}$$

6.2

비등속 원운동

Nonuniform Circular Motion



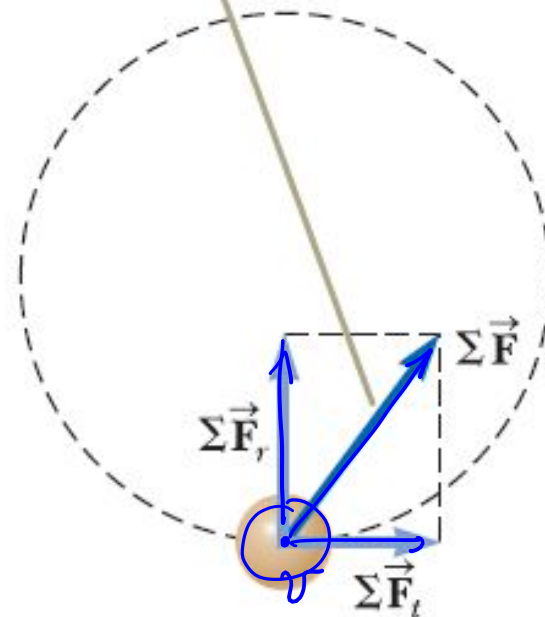
일정하지 않은 속력으로 원운동하면 가속도의
지름 성분 외에도 접선 성분이 존재한다.

그러므로 작용하는 힘도 접선 성분과 지름 성분을 가져야 한다. 이 때 입자에 작용하는 전체 힘은 두 성분의 합과 같다.

$$\sum \mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_r + \sum \mathbf{F}_t$$

$\parallel m \frac{v^2}{r}$
 $\parallel m \frac{dv}{dt}$

입자에 작용하는 알짜힘은
지름 방향 힘과 접선 방향
힘의 벡터합이다.



예제 6.4

공에 주목

아래 그림에 설명된 것처럼 질량 m 인 작은 구가 길이 R 의 줄 끝에 매달려 고정된 점 O 를 중심으로 수직 원운동을 하고 있다. 이 구의 속력이 v 이고 줄이 수직 방향과 각 θ 를 이루고 있을 때 줄의 장력을 구하라.

Handwritten equations and force analysis:

- Energy at top: $E = \frac{1}{2} m v_{top}^2 + mg \cdot 2R$
- Energy at bottom: $E = \frac{1}{2} m v_{bot}^2 + 0$
- Energy conservation: $E = \frac{1}{2} m v^2 + mg R (1 - \cos \theta)$
- Force at top: $F_{top} = mg + T_{top} = m \frac{v_{top}^2}{R}$
- Force at bottom: $F_{bottom} = T_{bot} - mg = m \frac{v_{bot}^2}{R}$
- Force at angle θ : $F = T - mg \cos \theta = m \frac{v^2}{R}$
- Resulting tension: $\therefore T = mg \cos \theta + m \frac{v^2}{R}$
- Velocity relation: $v^2 = v_{top}^2 + 2Rg(1 + \cos \theta)$

구의 접선 방향에 대해 운동법칙을 적용하면
중력의 접선 성분만 고려하면 된다.

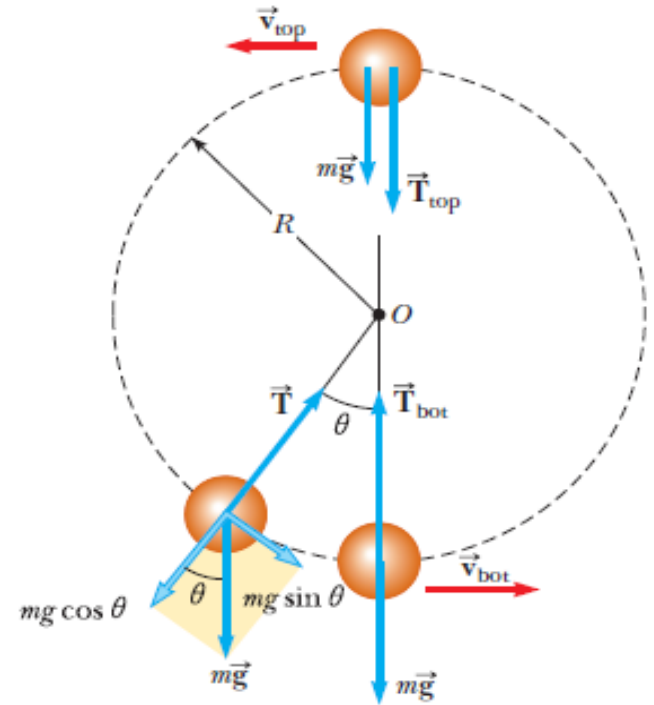
$$\sum F_t = mg \sin \theta = ma_t$$

$$a_t = g \sin \theta$$

구의 지름 방향에 대해 운동법칙을 적용하면

$$\sum F_r = T - mg \cos \theta = \frac{mv^2}{R}$$

$$\therefore T = mg \left(\frac{v^2}{Rg} + \cos \theta \right)$$



$$T_{top} = mg \left(\frac{v_{top}^2}{Rg} - 1 \right)$$

$$T_{bot} = mg \left(\frac{v_{bot}^2}{Rg} + 1 \right)$$

6.3

가속틀에서의 운동

Motion in Accelerated Frames

$$\vec{u}_A = \vec{u}_B + \vec{v}$$

자동차가 급격하게 좌회전하면 좌석에 앉아 있는 승객은 오른쪽으로 밀리는 힘을 받는다 (원심력).

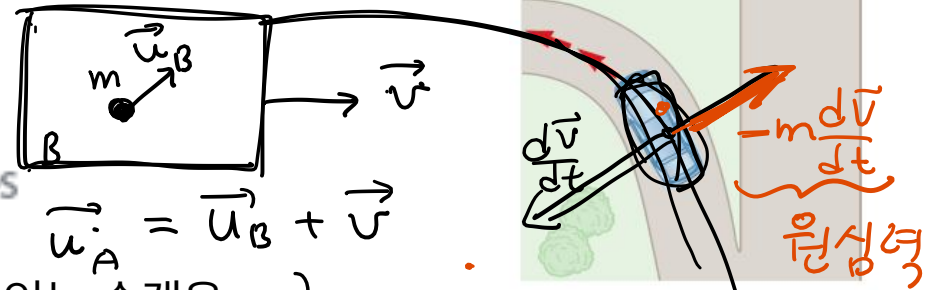
이것은 자동차의 속도 벡터의 방향 변화와 관련된 구심 가속도에 의한 겉보기 힘 (fictitious force)이다.

겉보기 힘은 어떤 물체에 실제 힘과 같은 방식으로 작용하는 것 같이 보인다. 그러나 실제 힘은 언제나 두 물체 간의 상호 작용이지만, 겉보기 힘에 대하여는 두 번째 물체를 찾을 수 없다.

승객에 작용하는 힘(곡률 중심을 향한)이 충분히 크다면, 승객은 자동차를 따라 원형 궤도를 돌게 된다.

이 힘은 승객과 자동차 의자 사이의 마찰력이다.

승객이 문 쪽으로 미끄러지는 것은 밖으로 향하는 힘 때문이 아니라, 승객이 자동차를 따라 휘어진 궤도를 움직일 정도로 마찰력이 충분히 크지 않기 때문이다.



$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{v} = \text{등속}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A - \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{real}} - m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

승객의 기준틀에서 보면, 어떤 힘이 승객을 오른쪽 문으로 밀는 것 같지만, 이 힘은 겉보기 힘이다.



자동차 의자는 지구 기준틀에 대해서 상대적으로 왼쪽을 향하는 실제 힘 (마찰)을 승객에게 작용하여 자동차와 함께 방향을 바꾸도록 한다.



크기

◎ 코리올리 힘(Coriolis force)

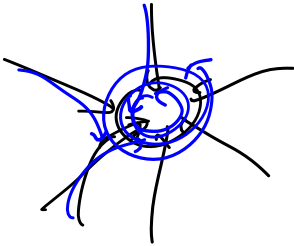
a: 관성기준틀에서 본 공의 궤도

b: 원판위의 관찰자가 본 궤도

그림 (b)의 관찰자는 (a) 궤도를 예상하지만, 실제로 공은 자신을 향해 날아오다가 한쪽으로 방향을 바꾸는 것으로 관찰한다.

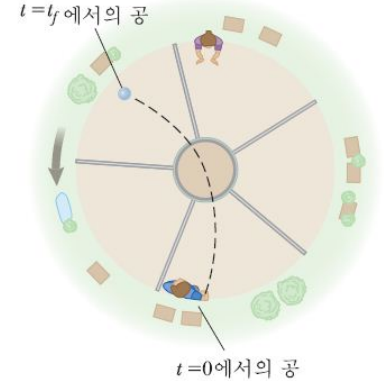
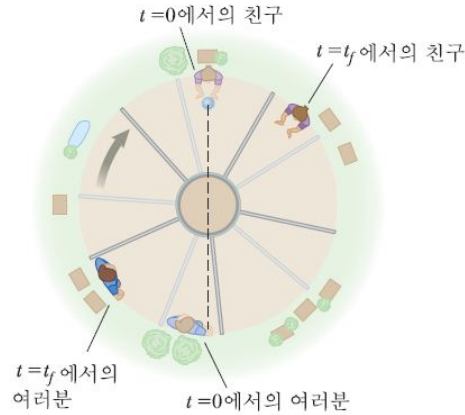
그러므로 회전하는 플랫폼에 있는 친구는 공이 뉴턴의 제1법칙을 만족하지 않는다고 말하고, 어떤 힘에 의해 공이 휘어진 궤도를 따르게 되었다고 주장한다. 이 가상의 힘을 **코리올리 힘(Coriolis force)**이라 한다. 겉보기 힘은 실제 힘은 아닐지라도, 실제로 영향을 미칠 수 있다.

지구의 회전에 의한 코리올리 힘은 허리케인의 회전을 일으키며 대규모의
대양 해류를 일으킨다. **비관성계:** 하수구, 태풍경로, 남극풍선, 푸코진자 등



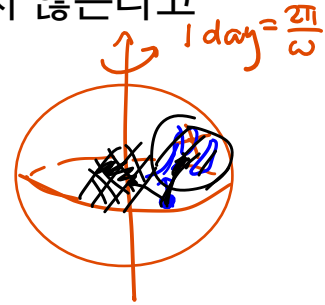
회전 원판의 반대쪽에 공이 도달한 시간 t_f 에, 친구는 더 이상 거기서 공을 잡지 못한다. 이 관측자에 따르면, 공은 뉴턴의 법칙에 따라 직선 운동을 한다.

친구의 관점에서는, 공이 날아오면서 한쪽으로 휘게 된다. 친구는 기대했던 궤도에서 벗어난 것을 설명하기 위하여 겉보기 힘을 도입한다.



a

—b



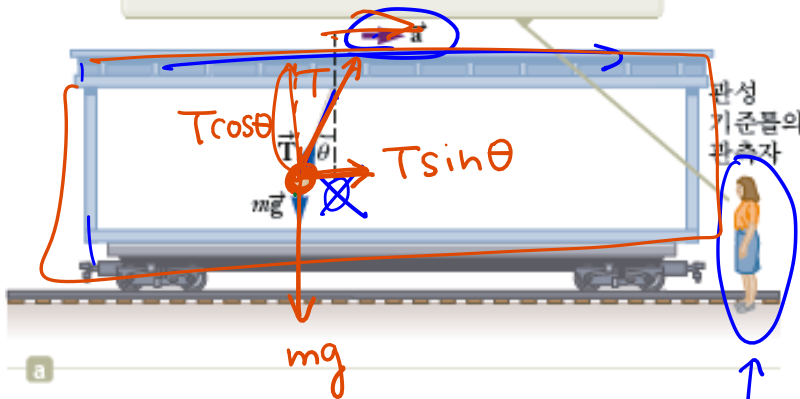
$$\omega = \frac{2\pi}{1 \text{ day}} = \frac{2\pi}{24 \times 3600} \sim 10^{-4}$$

예제 6.5

선운동에서의 겉보기 힘

질량 m 인 작은 공이 그림 6.10처럼 오른쪽으로 가속되고 있는 유개화차의 천장에 줄로 매달려 있다. 그림 6.10a에 있는 관성 기준틀의 관측자와 그림 6.10b에서 기차에 있는 비관성 기준틀의 관측자는 줄이 연직 방향에 대하여 θ 의 각도를 이루고 있음에 동의한다. 비관성 기준틀의 관측자는 우리가 겉보기 힘으로 알고 있는 어떤 힘이 줄을 연직 방향으로부터 벗어나게 하였다고 주장한다. 그림 6.10a의 관성 기준틀 관측자가 측정한 유개화차의 가속도와 관계되는 이 힘의 크기를 구하라.

화차의 바깥에 정지한 관성 기준틀의 관측자는 공의 가속도가 $\vec{T}$ 의 수평 성분에 의한 것이라 주장한다.

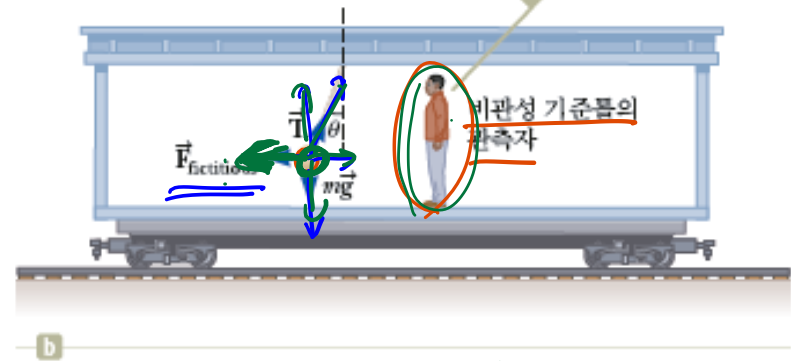


$$T \cos \theta = mg$$

$$T \sin \theta = ma$$

$$\tan \theta = \frac{a}{g}$$

화차에 타고 있는 비관성 기준틀의 관측자는 공에 작용하는 알짜힘은 없고, 줄이 연직으로부터 벗어난 것은 $\vec{T}$ 의 수평 성분을 상쇄하는 겉보기 힘 $\vec{F}_{\text{fictitious}}$ 때문이라 말한다.



관성좌표계

$$\tan \theta = \frac{a}{g}$$

$$T \cos \theta = mg$$

$$\vec{F}' = m\vec{O} = m\vec{a}'$$

$$\vec{T} + m\vec{g}$$

$$\vec{F}_{\text{가상}} = T \sin \theta$$

$$\pm ma$$

6.4

저항력을 받는 운동

Motion in the Presence of Resistive Forces

유체 (액체) 또는 (기체) 안에서 물체가 움직이면 유체는 그 안에서 움직이는 물체에 저항력(resistive force)을 작용한다.

저항력의 방향은 언제나 물체의 매질에 대한 상대적인 운동 방향과 반대이고, 크기는 속력에 따라 복잡한 방식으로 변한다.

$$|\vec{R}| \propto v, \quad v^2$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 아주 작고 느릴 때 /

모형 1: 물체의 속도에 비례하는 저항력

(Model 1: Resistive Force Proportional to Object Velocity)

액체나 기체 속을 운동하는 물체에 작용하는 저항력이 물체의 속도에 비례하는 경우

$$\mathbf{R} = -\underline{\underline{bv}}$$

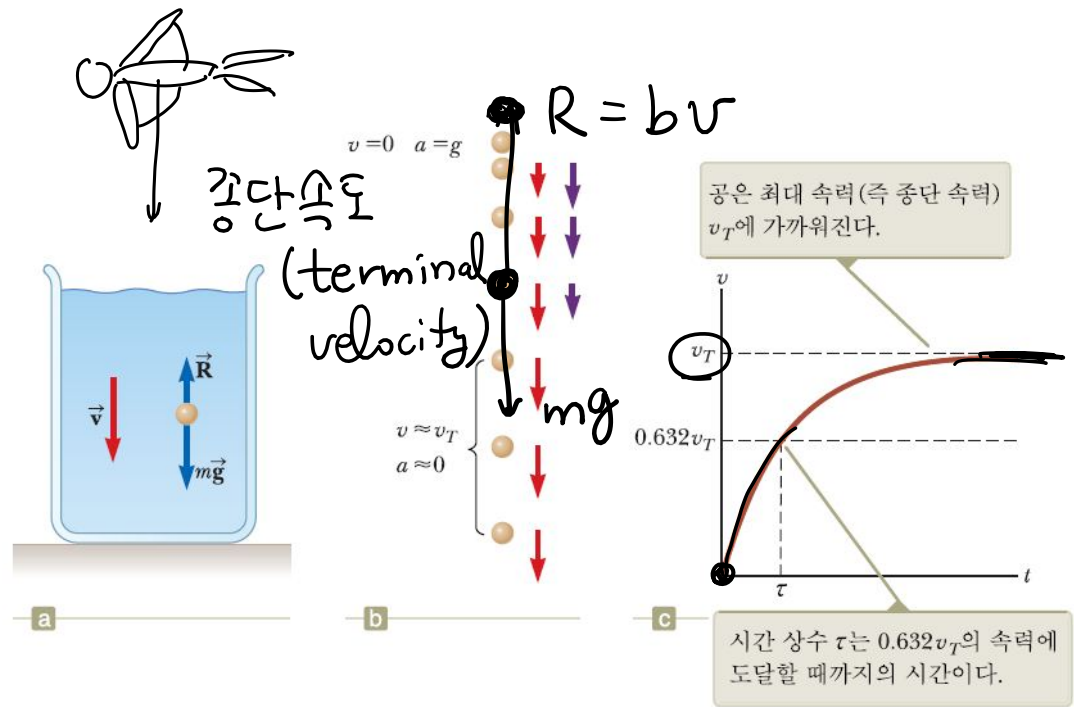
b : 물체의 모양과 크기 그리고 매질의 성질에 의존하는 상수

v : 물체의 매질에 대한 상대 속도

그림 (a)의 경우,

$$\underbrace{mg - bv}_{\text{net force}} = \underbrace{ma}_{\text{Newton's 2nd law}} = m \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m}v$$



위의 식은 미분 방정식으로서, 속도 v 에 대해 풀면 그림 (c)와 같은 결과를 얻을 수 있다. **속도가 커질수록 가속도(기울기)가 작아진다!**

저항력의 크기가 구의 무게에 가까워지면 가속도는 영(0)에 가까워진다.

이 경우, 구의 속력은 종단 속도 v_T (terminal speed)에 가까워진다.

$$mg - bv_T = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{v_T = \frac{mg}{b}}}$$

$$mg - bv^2 = m \frac{dv}{dt}$$

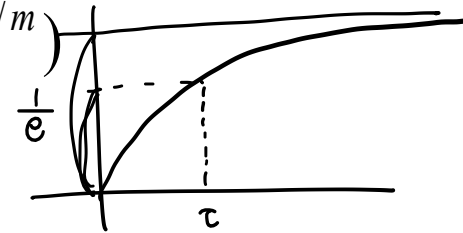
$$v_T = \sqrt{\frac{mg}{b}}$$

Handwritten notes: "점까지" (point here) pointing to the square root symbol, and "v_T" written below the equation.

미분방정식의 실제 해: $v = \frac{mg}{b} (1 - e^{-bt/m}) \equiv v_T (1 - e^{-t/\tau})$

이 해를 미분방정식에 대입하여 확인해 보자 $(\frac{dv}{dt} = ge^{-bt/m})$

e: (exponential) 자연로그의 밑, 오일러 수 (e=2.71828)



$\tau = m/b$, 시간 상수 (time constant)

$t=0$ 에서 놓여진 구가 종단 속력의 63.2%에 도달하는데 걸리는 시간

$t = \tau$ 를 대입하면 $v = 0.632v_T$

$$m \frac{dv}{dt} = mg - bv = -b \left(v - \frac{mg}{b} \right) e^{-t/\tau}$$

상속 v_T

$$\Downarrow$$

$$\frac{dv'}{dt} = \left(-\frac{b}{m} \right) v' \Rightarrow \boxed{v'(t) = v'(0) e^{-\frac{b}{m}t}} \quad \tau \cdot \frac{b}{m} = 1$$

$$\frac{dv'}{dt} = \frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m} v' = -\frac{b}{m} (v - v_T)$$

$$v = v_T + \underbrace{v'(0)}_{v'(0)} e^{-\frac{b}{m}t}$$

149 7

예제 6.6

기름 속에서 가라앉는 공

물체의 속력에 비례하는 저항력을 가진 기름으로 채운 커다란 용기 속에서 질량 2.00 g인 작은 공을 놓는다. 공의 종단 속력은 5.00 cm/s이다. 시간 상수와 공이 종단 속력의 90.0 %에 도달하는 시간을 구하라.

$$b = \frac{mg}{v_T}$$

$$\tau = \frac{m}{b} = m \left(\frac{v_T}{mg} \right) = \frac{v_T}{g}$$

$$\tau = \frac{5.00 \text{ cm/s}}{980 \text{ cm/s}^2} = \underline{5.10 \times 10^{-3} \text{ s}}$$

$$v_T = \frac{mg}{b} \rightarrow b = \frac{mg}{v_T}$$

$$\tau = \frac{m}{b} = m \frac{v_T}{mg} = \frac{v_T}{g}$$

$$\frac{0.900 v_T}{1 - e^{-t/\tau}} = v_T (1 - e^{-t/\tau}) \rightarrow 0.1$$

$$e^{-t/\tau} = 0.100$$

$$-\frac{t}{\tau} = \ln(0.100) = -2.30$$

$$t = 2.30\tau = 2.30(5.10 \times 10^{-3} \text{ s}) = 11.7 \times 10^{-3} \text{ s}$$

$$= \underline{11.7 \text{ ms}}$$

$$-\frac{t}{\tau} = \log(0.1) = -2.3$$

$$\therefore t = 2.3 \times \tau$$

모형 2: 물체 속력의 제곱에 비례하는 저항력 (Model 2: Resistive Force Proportional to Object Speed Squared)

비행기, 스카이다이버, 자동차 또는 야구공처럼 공기 속에서 빠른 속력으로 운동하는 물체들에 대해서는, **저항력이 속력의 제곱에 비례**하는 것으로 비교적 잘 모형화할 수 있다. [1.2 절 참조]

$$R = \frac{1}{2} \underbrace{D}_{\text{물체와 유체의 성질}} \underbrace{\rho}_{\text{단면적}} A v^2$$

D (끌림 계수): 경험적으로 얻어지는 차원이 없는 양

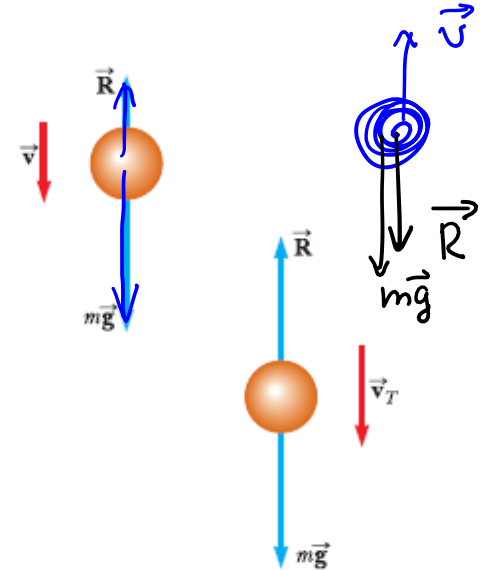
ρ : 공기의 밀도

A : 운동하는 물체의 속도(운동 방향)에 수직인 평면에서 측정한
물체의 단면적

질량 m 인 물체가 정지 상태에서 자유 낙하하는 경우

$$\sum F = \underbrace{mg}_{\text{중력}} - \underbrace{\frac{1}{2} D \rho A v^2}_{\text{저항력}} = m a$$

$$\Rightarrow \therefore a = g - \left(\frac{D \rho A}{2m} \right) v^2 \quad a = 0 \rightarrow$$



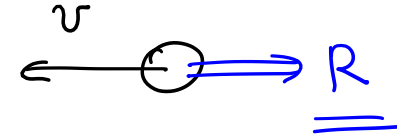
중력이 저항력과 상쇄될 때, 이 물체에 작용하는 알짜힘은 영이 되므로 종단 속력 v_T 를 구할 수 있다.

$$\underbrace{g - \left(\frac{D \rho A}{2m} \right) v_T^2 = 0} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\therefore v_T = \sqrt{\frac{2mg}{D \rho A}}}$$

$$\begin{aligned} mg &= R \\ &= \frac{1}{2} D \rho A v_T^2 \end{aligned}$$

예제 6.7

야구공에 작용하는 저항력



투수가 타자에게 0.145 kg 의 야구공을 40.2 m/s ($= 90 \text{ mi/h}$)의 빠른 속력으로 던졌다. 이 속력에서 공에 작용하는 저항력을 구하라.

공기의 밀도를 1.20 kg/m^3 라 하고 표 6.1로부터 m , v_T 및 A 에 적당한 값을 대입하여 D 를 구하면

$$D = \frac{2mg}{v_T^2 \rho A}$$

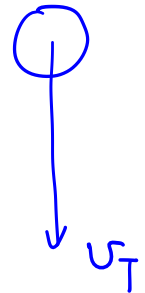
$$= \frac{2(0.145 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)}{(43 \text{ m/s})^2 (1.20 \text{ kg/m}^3) (4.2 \times 10^{-3} \text{ m}^2)}$$

$$= 0.305$$

$$R = \frac{1}{2} D \rho A v^2$$

$$= \frac{1}{2} (0.305) (1.20 \text{ kg/m}^3) (4.2 \times 10^{-3} \text{ m}^2) (40.2 \text{ m/s})^2$$

$$= 1.2 \text{ N}$$



$$mg = \frac{1}{2} D \rho A v_T^2$$

$$\div) \quad R = \frac{1}{2} D \rho A v^2$$

$$\frac{mg}{R} = \frac{v_T^2}{v^2}$$

$$R = mg \frac{v^2}{v_T^2}$$

$$= 0.145 \times 9.8 \times \frac{(40.2)^2}{(43)^2}$$