제4장 이차원에서의 운동

Motion in Two Dimensions

* 이(2)차원에서 움직이는 입자의 운동학♪
♪
-2차원 운동에 대한 기본을 알면, 궤도상에 있는 인공위성의 운동에서♪

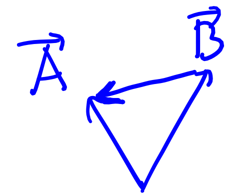
부터 균일한 전기장내에서 전자의 운동에 이르기까지 다양한 운동을♪

다룰 수 있음♪
♪
* 위치, 속도, 가속도가 벡터임을 공부♪
♪
- 1차원 운동과 같이 2차원 운동에서의 기본 정의로부터 ♪
운동 방정식을 유도♪
♪
* 2차원 운동인 포물체 운동, 등속 원운동을 다룸♪
♪
* 상대 운동의 개념을 논의♪

- 주어진 입자의 위치, 속도, 가속도가 다른 좌표계에 있는 ♪
관찰자에게는 왜 다른 값으로 측정되는지를 공부♪

4.1 위치, 속도 그리고 가속도 벡터

The Position, Velocity, and Acceleration Vectors



위치 벡터 $\mathbf{r}(t) \equiv x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ $= (x, y)$

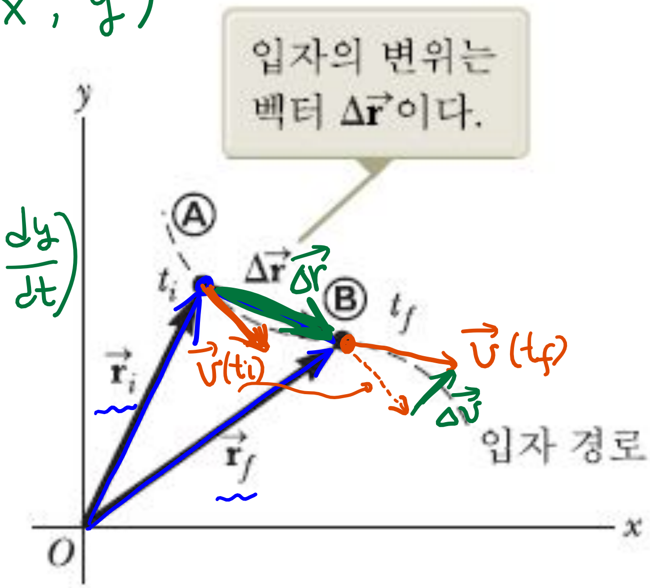
변위 벡터 $\Delta\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i$

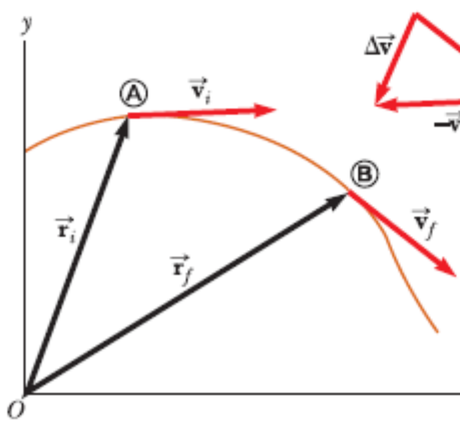
평균속도 $\mathbf{v}_{avg} \equiv \dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$ 벡터

$\left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)$

$\parallel$

순간속도 $\mathbf{v} \equiv \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$





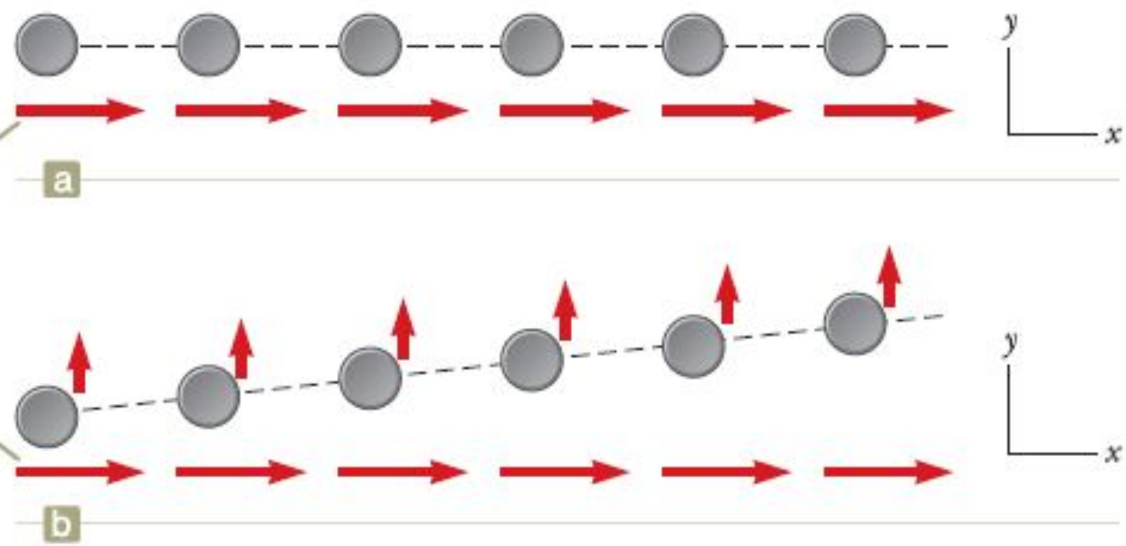
평균가속도 $\mathbf{a}_{avg} \equiv \dfrac{\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i}{t_f - t_i} = \dfrac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}$

순간가속도 $\mathbf{a} \equiv \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

4.2 이차원 등가속도 운동

Two-Dimensional Motion with Constant Acceleration

속도의 x성분을 나타내는 수평인 빨간색 벡터들은 그림의 양쪽 부분에 있어서 같은 길이이고, 이것은 이차원에서의 운동이 수직인 두 방향의 독립적인 두 운동으로 모형화될 수 있음을 보여준다.



2차원 운동은 *x*-와 *y*-축 방향의 각각 독립된 <u>두 개의 운동으로 기술</u>될 수 있다. 즉, *y*-방향으로의 어떠한 영향도 *x*- 방향의 운동에 영향을 주지 않는다.

그리고 그 반대의 경우도 마찬가지이다.

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

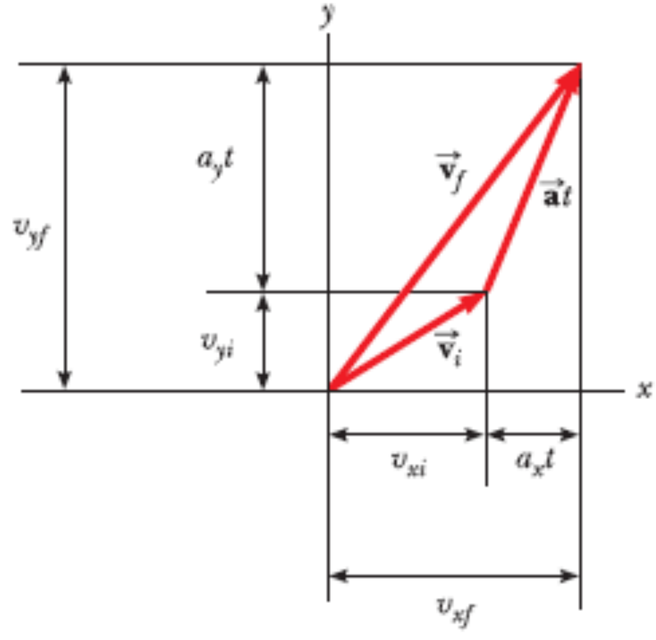
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} \equiv v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}$$

등가속운동 ($\vec{a}$ = 일정)

$$v_{xf} = v_{xi} + a_x t, \qquad v_{yf} = v_{yi} + a_y t$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_f &= v_{xf}\mathbf{i} + v_{yf}\mathbf{j} \\
&= (v_{xi} + a_x t)\mathbf{i} + (v_{yi} + a_y t)\mathbf{j} \\
&= (v_{xi}\mathbf{i} + v_{yi}\mathbf{j}) + (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j})t
\end{aligned}
$$

$$\therefore \mathbf{v}_f = \mathbf{v}_i + \mathbf{a}t$$



(a)

$$\vec{a} = (a_x, a_y) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}\right)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \text{상수}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \text{상수} \longrightarrow v_x = a_x t + v_{x0}$$

$$v_y = a_y t + v_{y0}$$

$$\vec{v} = (v_x, v_y) = \underbrace{v_x}\, \underbrace{\vec{i}}_{\text{단위벡터 } (1,0)} + v_y \underbrace{\vec{j}}_{(0,1)}$$

$$= (a_x t + v_{x0})\vec{i} + (a_y t + v_{y0})\vec{j} = \underbrace{(a_x\vec{i} + a_y\vec{j})}_{\vec{a}}t + \underset{(v_{x0}\vec{i} + v_{y0}\vec{j})}{\overset{}{\vec{v}_0}}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = a_x t + v_{x0} \longrightarrow x = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{x0}t + x_0$$

$$y = \frac{1}{2}a_y t^2 + v_{y0}t + y_0$$

$$\Rightarrow \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v_0}t + \vec{r_0}$$

$$x_f = x_i + v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2$$

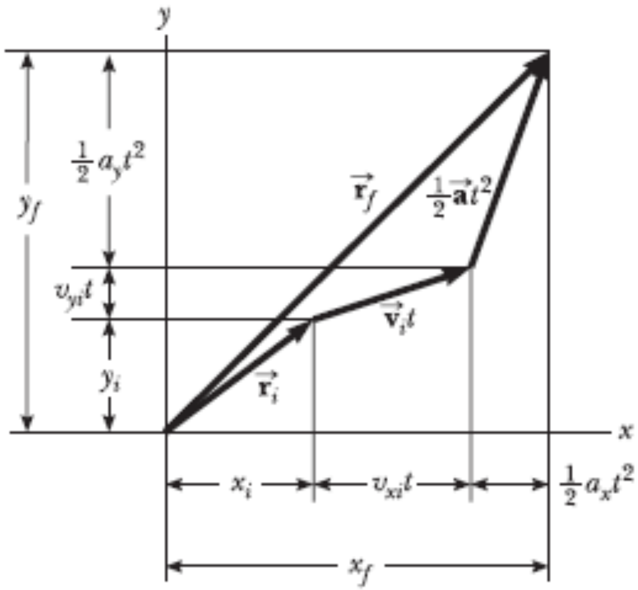
$$y_f = y_i + v_{yi}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2$$

$$\mathbf{r}_f = x_f\mathbf{i} + y_f\mathbf{j}$$

$$= (x_i + v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2)\mathbf{i} + (y_i + v_{yi}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2)\mathbf{j}$$

$$= (x_i\mathbf{i} + y_i\mathbf{j}) + (v_{xi}\mathbf{i} + v_{yi}\mathbf{j})t + \tfrac{1}{2}(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j})t^2$$

$$\therefore \mathbf{r}_f = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i t + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}t^2$$



(b)

예제 4.1 평면에서의 운동

v_{x0} v_{y0}

xy 평면에서 입자가 시간 $t = 0$일 때, x 성분은 20 m/s, y 성분은 −15 m/s의 처음 속도로 원점에서 운동하기 시작한다. 이 입자는 x 성분의 가속도 $a_x = 4.0$ m/s²으로 운동한다.

$\vec{r}_0 = 0$

(A) 임의의 시간에서 속도 벡터를 구하라.

$$\vec{v} = \vec{a}t + \vec{v}_0$$
$$= (4.0, 0)t + (20, -15)$$
$$= (20 + 4t, -15)$$

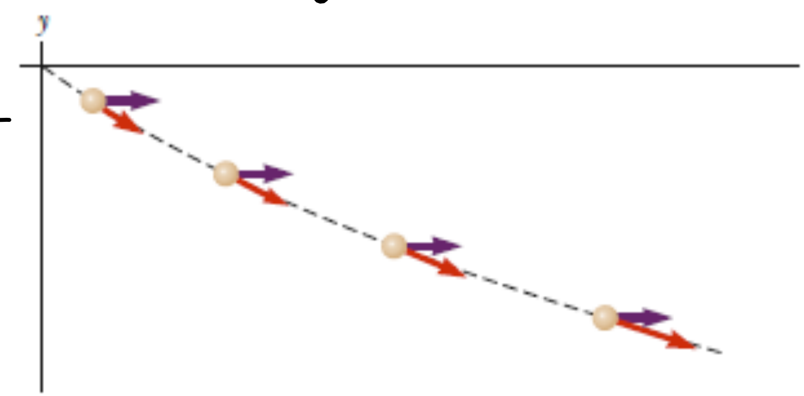
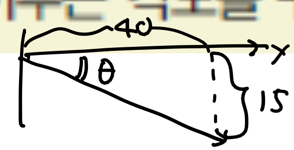


그림 4.6 (예제 4.1) 입자의 운동을 나타낸 그림

(B) 시간 $t = 5.0$ s일 때 입자의 속도와 속력, 속도 벡터가 x축과 이루는 각도를 구하라.

$t = 5$ $\vec{v} = (40, -15)$, 속력 $|\vec{v}| = \sqrt{40^2 + 15^2}$,



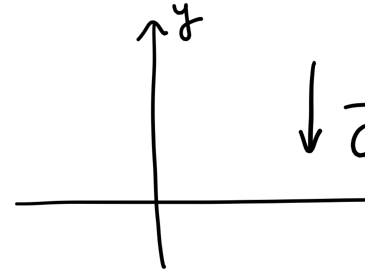
$\tan\theta = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

(C) 임의의 시간 t에서 입자의 x 및 y 좌표와 그 시간에서 입자의 위치 벡터를 구하라.

$$\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0 \quad (\vec{r}_0 = 0) \quad = \frac{1}{2}(4, 0)t^2 + (20, -15)t + \vec{0}$$
$$= (2t^2 + 20t, -15t)$$

4.3 포물체 운동

Projectile Motion



$g = 9.8\,m/s^2$

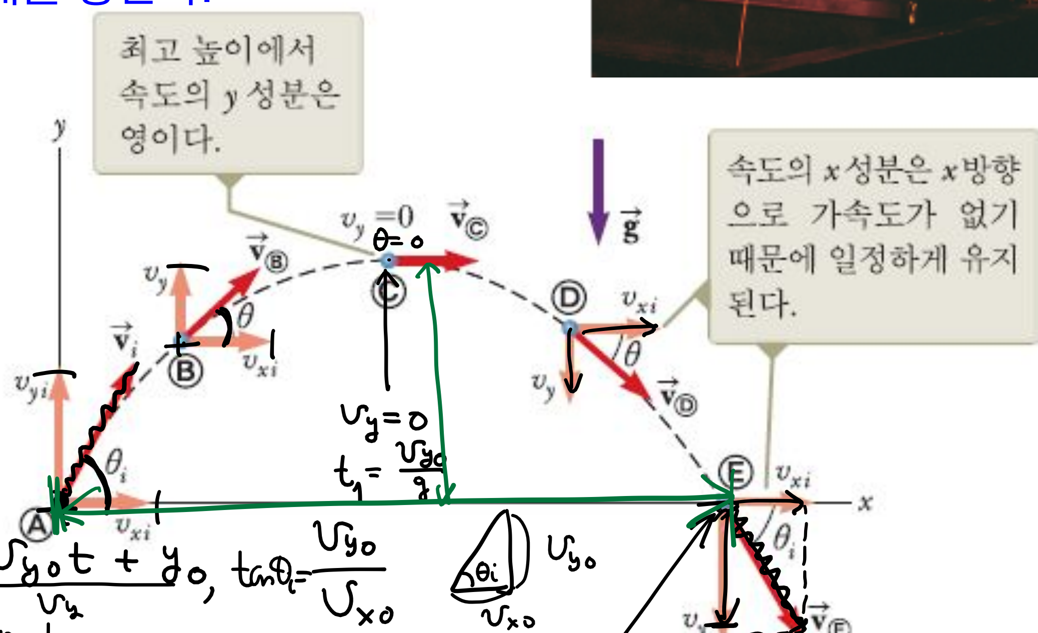
$\vec{a} = (0, -g)$

가정

(1) 자유 낙하 가속도(g)는 일정하고 아래를 향한다.

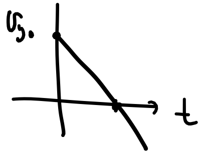
(2) 공기 저항은 무시한다.

포물체 운동을 분석할 때, 수평 방향의 등속 운동(1)과 수직 방향의 자유 낙하 운동(등가속도 운동)(2)의 중첩으로 간주할 수 있다.



$x = v_{x0} t + x_0$, $y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{y0} t + y_0$, $\tan\theta_i = \frac{v_{y0}}{v_{x0}}$

$v_x = v_{x0}$, $v_y = -gt + v_{y0}$



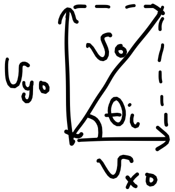
$y = 0 = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{y0} t = t\left(-\frac{g}{2} t + v_{y0}\right) = 0$

$t_2 = \frac{2 v_{y0}}{g} = 2 t_1$

$v_y(t_2) = -v_{y0}$

$$t_1 = \frac{v_{y0}}{g}$$

$$y(t_1) = -\frac{1}{2} g t_1^2 + v_{y0} t_1 = -\frac{1}{2}\cancel{g}\frac{v_{y0}^2}{g^{\cancel{2}}} + v_{y0}\frac{v_{y0}}{g} = \frac{v_{y0}^2}{2g}$$



$$x_{최대} = v_{x0}\, t_2 = v_{x0}\cdot\frac{2v_{y0}}{g} = \frac{2v_{x0}v_{y0}}{g} = \frac{2v_0^2\sin\theta_i\cos\theta_i}{g} = \frac{v_0^2\sin(2\theta_i)}{g}$$

$v_0\cos\theta_i = v_{x0}$, $\quad v_0\sin\theta_i = v_{y0}$

같은 속력일때, 최대 거리를 위한 각도? $\quad \sin(2\theta_i) = 1 \rightarrow \theta_i = 45^\circ$

x-축(등속) → $v_{xf} = v_{xi}$ $\boxed{x_f = x_i + v_x t}$

y-축 (등가속) → $v_{yf} = v_{yi} + a_y t$ $y_f = y_i + v_{yi}t + \frac{1}{2}a_y t^2$

$\therefore a_x = 0$ $\therefore a_y = -g$	$v_{xf} = v_i \cos\theta_i$ $v_{yf} = v_i \sin\theta_i - gt$	$x_f = (v_i \cos\theta_i)t$ $y_f = (v_i \sin\theta_i)t - \frac{1}{2}gt^2$

◆ 포물체 운동의 수평 도달거리(R)와 최고 높이(h)♪

정점(꼭대기, 최고 높이)에 있을 때 운동 방향이 상(방)향에서 하(방)향으로 바뀌므로 그 점에서 $v_y = 0$이다.

$$\therefore v_{yf} = v_i \sin\theta_i - g t_A = 0 \qquad \therefore t_A = \frac{v_i \sin\theta_i}{g}$$

이 시간을 y에 대한 식에 대입하면

$$\therefore h = (v_i \sin\theta_i)\frac{v_i \sin\theta_i}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_i \sin\theta_i}{g}\right)^2 = \frac{v_i^2 \sin^2\theta_i}{2g}$$

다시 땅에 떨어지는 점의 좌표가 $(R, 0)$이므로

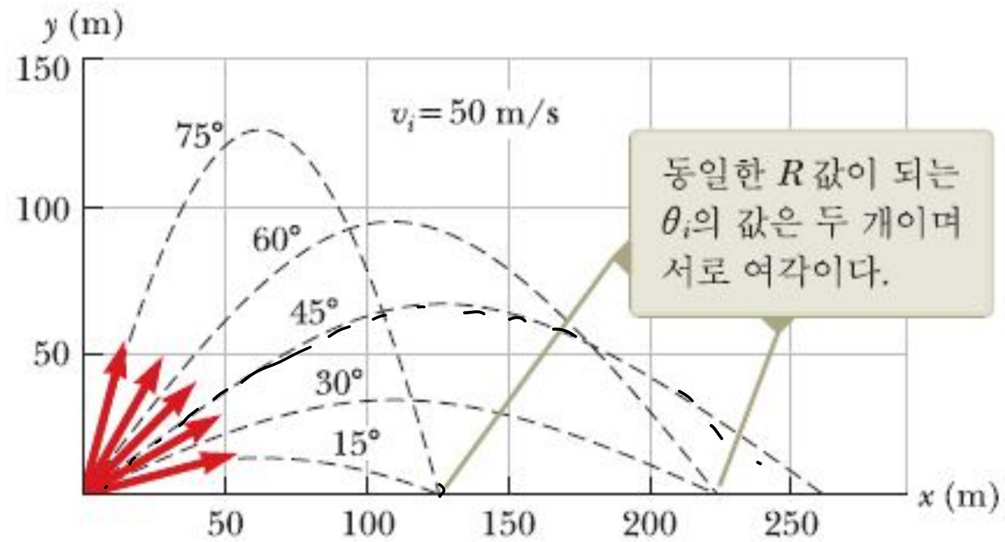
$$y = (v_i \sin\theta_i)t_B - \frac{1}{2}g t_B^2 = 0$$

$$\therefore t_B = \frac{2v_i \sin\theta_i}{g} = 2t_A \quad (t_B = 0 \text{ 는 원점이므로 제외})$$

$x_f = (v_i \cos\theta_i)t$에 시간 t_B 를 대입하면 낙하거리 는 $R = (v_i \cos\theta_i)t_B$

$$\therefore R = \frac{v_i^2 \sin 2\theta_i}{g}$$

초속도가 동일한 경우 $\theta = 45°$일 때 R이 최대가 된다.



예제 4.2 멀리 뛰기

멀리 뛰기 선수(그림 4.11)가 수평 위 20.0°의 각도로 비스듬하게 속력 11.0 m/s로 뛰어오른다.

그림 4.11 (예제 4.2) 2008년 베이징 올림픽 경기에서 남자 10종 경기 중 멀리 뛰기를 하는 프랑스의 로메인 바라스(Romain Barras)

(A) 수평 방향으로 얼마나 멀리 뛰는가?

$$\text{Rad} = \frac{40^\circ}{180^\circ} \cdot \pi$$

$$R = \frac{v_i^2 \sin 2\theta_i}{g} = \frac{(11.0\ \text{m/s})^2 \sin 2(20.0^\circ)}{9.80\ \text{m/s}^2} = \boxed{7.94\ \text{m}}$$

(B) 도달한 최대 높이를 구하라.

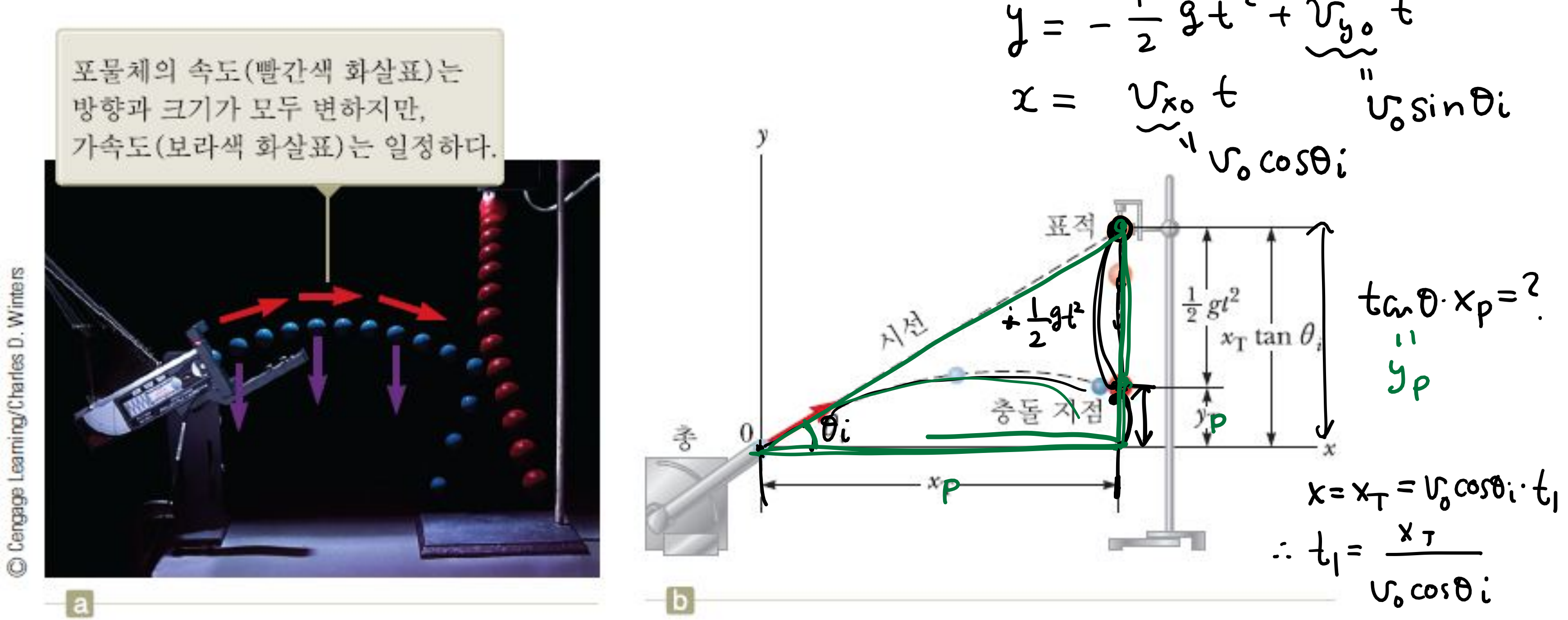
$$\frac{v_{y0}^2}{g} = \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{g}$$

$$h = \frac{v_i^2 \sin^2\theta_i}{2g} = \frac{(11.0\ \text{m/s})^2 (\sin 20.0^\circ)^2}{2(9.80\ \text{m/s}^2)}$$

$$= \boxed{0.722\ \text{m}}$$

예제 4.3 백발백중

포물체가 표적을 맞추는 실험에서 정지해 있던 표적은 발사와 동시에 떨어지기 시작한다. 최초에 멈춰 있던 표적을 겨누어 발사했다면 언제나 명중할 수 있음을 보여라.



표적은 y방향의 일차원 등가속도 운동을 하고, 포물체는 y방향으로는 등가속도 운동, x방향으로는 등속운동을 한다. 표적의 y좌표에 대한 식은

$$(1)\quad y_T = y_{iT} + (0)t - \frac{1}{2}gt^2 = x_T \tan\theta - \frac{1}{2}gt^2$$

포물체에 대한 식을 써보면

$$(2) \quad y_P = y_{iP} + v_{yiP}t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

$$= \underbrace{v_{iP}}_{= v_0}\sin\theta t - \tfrac{1}{2}gt^2 \quad = \quad v_0 \sin\theta \cdot \frac{x_p}{v_0\cos\theta} = \tan\theta\, x_p - \tfrac{1}{2}\cdot g\left(\frac{x_p}{v_0\cos\theta}\right)^2$$

$$x_P = x_{iP} + v_{xiP}t = v_{iP}\cos\theta t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x_P}{v_{iP}\cos\theta}$$

y'_p

$$(3) \quad y_P = v_{iP}\sin\theta\left(\frac{x_P}{v_{iP}\cos\theta}\right) - \tfrac{1}{2}gt^2$$

$$= x_P \tan\theta - \tfrac{1}{2}gt^2$$

$$y_p + \cancel{\tfrac{1}{2}gt^2} = \tan\theta\, x_p$$

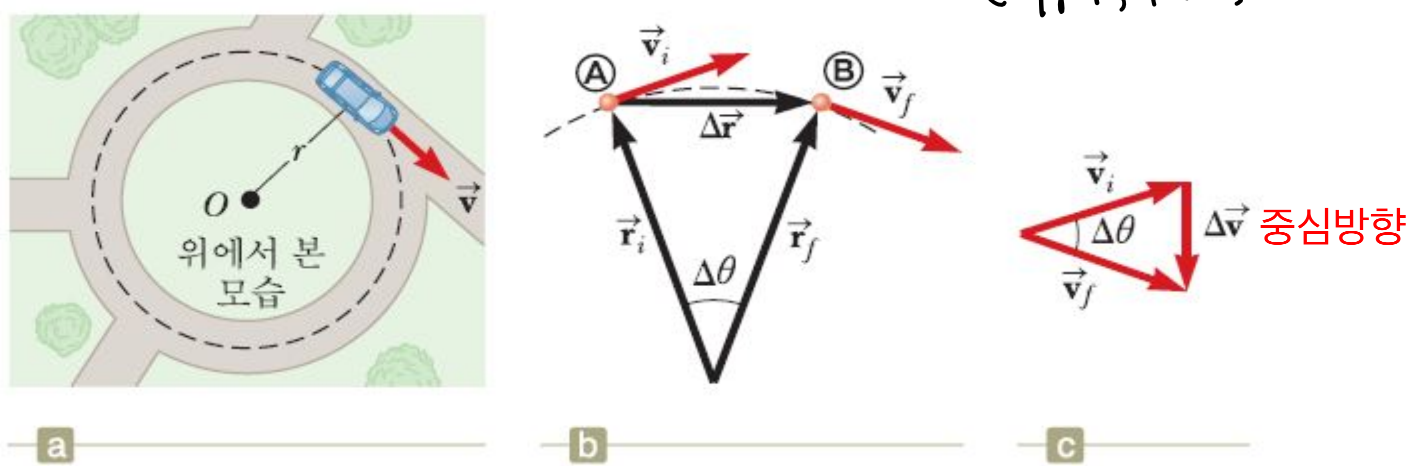
$x\downarrow p = x_T$ 를 대입하면,

$$\therefore \quad y_T = y_P$$ ⇨ 포물체는 항상 표적과 충돌!

4.4 분석 모형: 등속력 원운동하는 입자
Analysis Model: Particle in Uniform Circular Motion

$\vec{a} \neq$ 일정
$|\vec{a}| =$ 일정
$\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$ 모두 변함.
$|\vec{r}|, |\vec{v}|, |\vec{a}|$ 모두 일정

등속 원운동: 일정한 속력으로 원주 위를 움직이는 운동



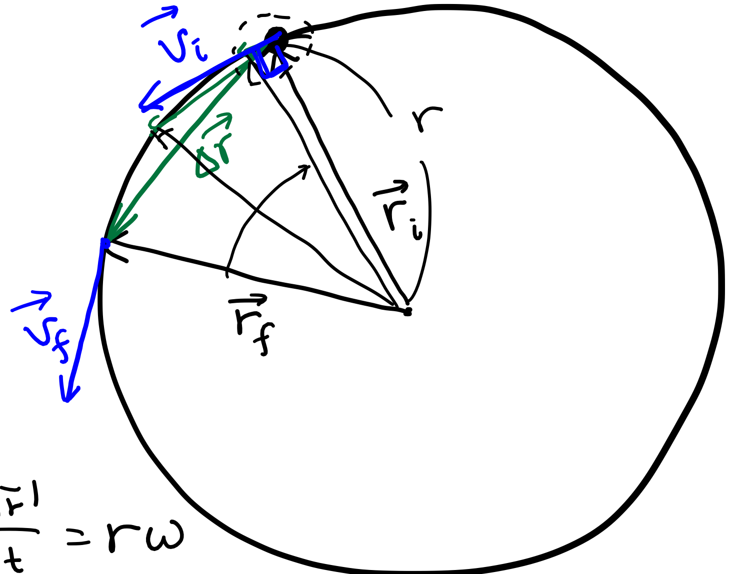
속도의 크기는 일정하지만 방향이 계속 바뀌므로 가속도가 존재한다!
위의 그림에서 검은색 삼각형과 빨간색 삼각형은 닮은꼴이다.

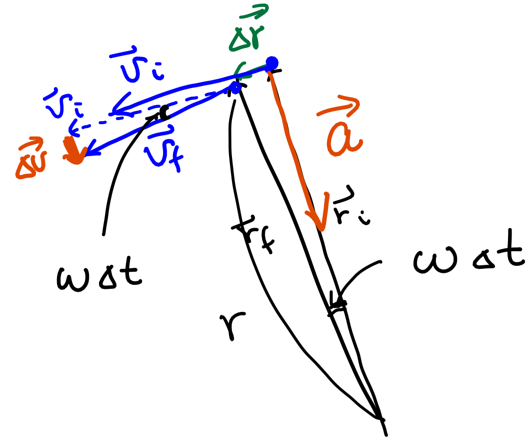
$$\frac{|\Delta \mathbf{v}|}{v} = \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{r} \Rightarrow |a_{avg}| = \frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta t} = \frac{v}{r}\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{a_c = \frac{v^2}{r}}$$

구심가속도 (크기, 방향)

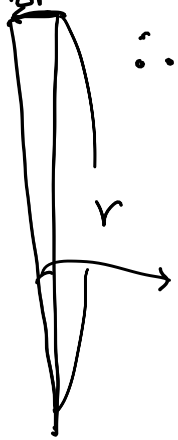
$$\boxed{T = \frac{2\pi r}{v}}$$

원운동의 주기

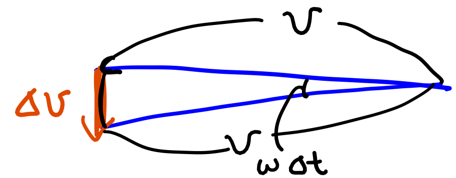




$|\Delta\vec{r}| = r\,\omega\Delta t$



$\therefore v = \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = r\omega$



$$\Delta v = v \cdot \omega\Delta t$$

$$\therefore \quad v = r\omega \Rightarrow \omega = \frac{v}{r}$$

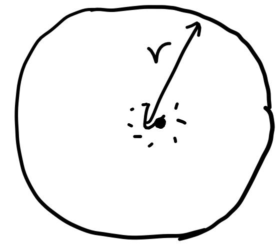
$$a = r\omega^2 = r\left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{v^2}{r}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = v\omega = r\omega^2$$

$$\frac{2\pi r}{v} = T \rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cancel{r}}{\cancel{r}\omega} = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\hookrightarrow v = \frac{2\pi r}{T}$$

예제 4.5 지구의 구심 가속도



(A) 태양 주위로 공전하는 지구의 구심 가속도를 구하라.

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

T : 1년

$365 \times 24 \times 3600$

$$a_c = \frac{4\pi^2(1.496 \times 10^{11}\ \mathrm{m})}{(1\ \mathrm{yr})^2}\left(\frac{1\ \mathrm{yr}}{3.156 \times 10^7\ \mathrm{s}}\right)^2$$

$$= 5.93 \times 10^{-3}\ \mathrm{m/s^2}$$

(cf) $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$

$\approx$

$0.006 \ll \sim 10$

(B) 태양 주위로 공전하는 지구의 각속력을 구하라.

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{1\ \mathrm{yr}}\left(\frac{1\ \mathrm{yr}}{3.156 \times 10^7\ \mathrm{s}}\right) = 1.99 \times 10^{-7}\ \mathrm{s^{-1}}$$

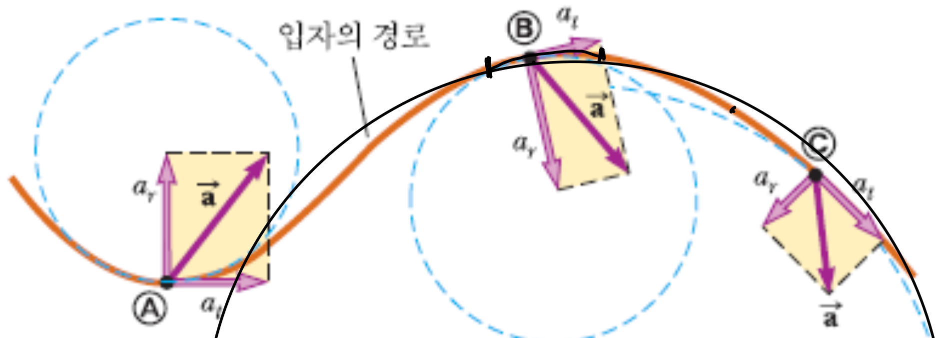
4.5 접선 및 지름 가속도

Tangential and Radial Acceleration

일반적인 곡선 상의 운동은 속도의 방향뿐 아니라 크기도 변화한다.

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2}$$



$$a_t = \left|\frac{dv}{dt}\right|$$ (접선가속도: 속력 변화, 순간속도 방향)

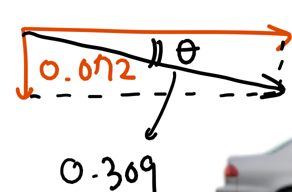
$$a_r = -a_c = -\frac{v^2}{r}$$ (지름가속도: 속도벡터 방향의 변화)

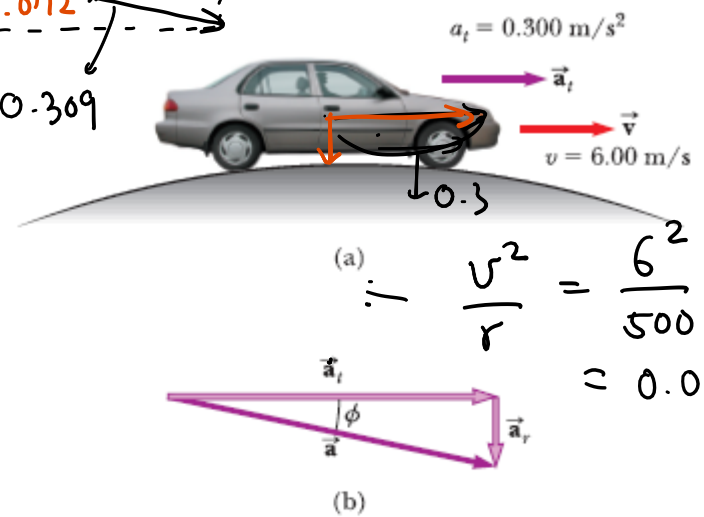
예제 4.6 고개 넘기

어떤 차가 도로를 따라 0.300 m/s²의 등가속도로 달리고 있다. 차가 도로에 있는 언덕을 넘어가는데, 언덕의 꼭대기는 반지름 500 m인 원모양이다. 차가 언덕 꼭대기에 도달하는 순간에, 속도 벡터는 수평이고 크기는 6.00 m/s이다. 이 순간 차의 전체 가속도 크기와 방향을 구하라.

r

$$\tan\theta = \frac{0.072}{0.3}$$





지름 가속도를 구하면

$$a_r = -\frac{v^2}{r} = -\frac{6.00^2}{500} = -0.072\,\text{m/s}^2$$

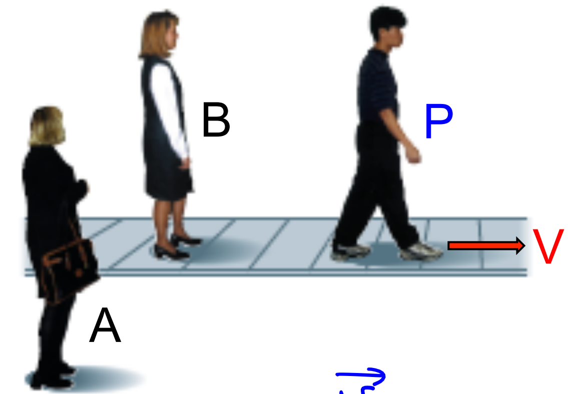
$$\fallingdotseq \frac{v^2}{r} = \frac{6^2}{500} = 0.072$$

$a_t = 0.3\ m/s^2$ 이므로

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2} = \sqrt{(-0.072)^2 + 0.300^2} = 0.309\ m/s^2$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{a_r}{a_t} = \tan^{-1}\left(\frac{-0.072}{0.030}\right) = -13.5°$$

4.6 상대 속도와 상대 가속도
Relative Velocity and Relative Acceleration



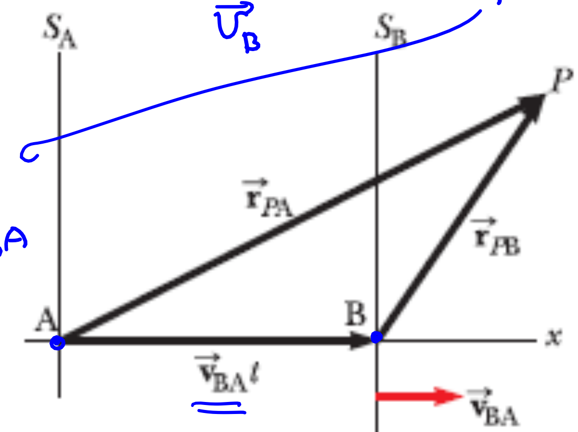
관찰자의 운동 상태에 따라
대상 물체의 운동이 다르게 표현된다.

$\vec{v}_P$

$\vec{v}_B$ $\vec{v}_P - \vec{v}_B$

두 기준틀의 원점이 일치하는 순간을 t=0이라 하고,
기준틀 S_B가 S_A에 대해 상대적으로 등속운동한다고 가정하면

$$\mathbf{r}_{PA} = \mathbf{r}_{PB} + \mathbf{v}_{BA}t$$



양변을 시간에 대해 미분하면

$$\frac{d\mathbf{r}_{PA}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_{PB}}{dt} + \mathbf{v}_{BA}$$

$\vec{u}_{PB} = \vec{u}_{PA} - \vec{v}_{BA}$

$$\mathbf{u}_{PA} = \mathbf{u}_{PB} + \mathbf{v}_{BA}$$

◀ 갈릴레이 속도 변환
(참고: 로렌쯔 변환)

$\vec{v}_{BA}$ = 등속 = 상수

A에 상대적인
B의 속도

양변을 다시 시간에 대해 미분하면

$$\frac{d\mathbf{u}_{PA}}{dt} = \frac{d\mathbf{u}_{PB}}{dt} + \underbrace{\frac{d\mathbf{v}_{BA}}{dt}}_{=0}$$

$$\therefore\ \mathbf{a}_{PA} = \mathbf{a}_{PB}$$

등속으로 움직이는 두 기준틀에서 측정한 가속도는 같다. 즉, 뉴턴의 운동 법칙이 동일하게 적용된다(Einstein의 특수 상대성이론).

예제 4.7 강을 가로질러 가는 배

넓은 강을 건너는 배가 물에 대하여 상대적으로 10.0 km/h의 속력으로 움직인다. 강물은 지면에 대하여 동쪽으로 5.00 km/h의 일정한 속력으로 흐르고 있다.

(A) 배가 북쪽을 향하고 있을 때, 강둑에 서 있는 관측자에 대한 배의 상대 속도를 구하라.

$$v_{bE} = \sqrt{v_{br}^2 + v_{rE}^2} = \sqrt{(10.0\ \mathrm{km/h})^2 + (5.00\ \mathrm{km/h})^2}$$

$$= 11.2\ \mathrm{km/h}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{rE}}{v_{br}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5.00}{10.0}\right) = 26.6°$$

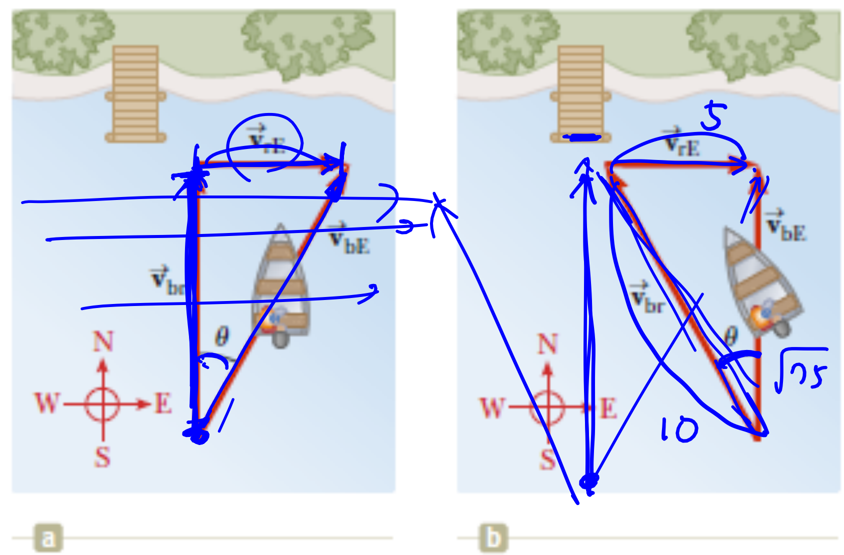


그림 4.20 (예제 4.7) (a) 배는 강을 곧장 가로질러 가려 하지만 하류에 도달한다. (b) 강을 곧장 가로질러 가려면, 배는 상류를 향해야 한다.

$\sin\theta = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$

(B) 강물에 대한 배의 상대 속력은 10.0 km/h로 같지만 그림 4.20b에 나타나 있는 바와 같이 북쪽으로 이동하려 할 때, 배가 향해야 하는 방향은 어느 쪽인가?

$$v_{bE} = \sqrt{v_{br}^2 - v_{rE}^2} = \sqrt{(10.0\ \mathrm{km/h})^2 - (5.00\ \mathrm{km/h})^2} = 8.66\ \mathrm{km/h}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{rE}}{v_{bE}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5.00}{8.66}\right) = 30.0°$$

오늘 보강 6:30 ~

포관 464호.